Théorème de Fejér (209, 247, 246)

EA, suites et séries p. 409-414.
EA, Fourier p. 184-185 et 190

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ continue et 2π-périodique. On note $\forall k \in \mathbb{Z}$.

$e_k : t \longmapsto e^{ikt}$ et $S_N = \sum_{k=-N}^{N} c_k(f)\, e_k$.

Noyau de Dirichlet : $D_N = \sum_{k=-N}^{N} e_k$ Noyau de Fejér : $K_N = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} D_k$

On pose $\forall N \in \mathbb{N}$, $\sigma_N(f) = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} S_k$.

lem : La suite $(K_N)_{N \geq 0}$ est une approximation de l'unité dans $L^1_{2\pi}$.

demo : * Montrons que K_N est positive $\forall t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

$$K_N(t) = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} D_k = \frac{1}{N+1} \frac{1}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \sum_{k=0}^{N} \sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)t\right)$$

série géométrique

$$= \frac{1}{N+1} \frac{1}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^{N} e^{i\left(k+\frac{1}{2}\right)t} \right)$$

$$= \frac{1}{N+1} \frac{1}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \operatorname{Im}\left(e^{\frac{it}{2}} \left(\frac{1-e^{i(N+1)t}}{1-e^{it}} \right)\right)$$

pour utiliser inégalité d'Euler

$$= \frac{1}{N+1} \frac{1}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \operatorname{Im}\left(e^{\frac{it}{2}} \left(\frac{e^{it\left(\frac{N+1}{2}\right)}}{e^{\frac{it}{2}}} \left(\frac{e^{-it\left(\frac{N+1}{2}\right)} - e^{it\left(\frac{N+1}{2}\right)}}{e^{\frac{-it}{2}} - e^{\frac{it}{2}}} \right)\right)\right)$$

$$= \frac{1}{N+1} \frac{1}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \operatorname{Im}\left(e^{it\left(\frac{N+1}{2}\right)} \frac{\sin\left(t\left(\frac{N+1}{2}\right)\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \right)$$

$$= \frac{1}{N+1} \frac{\sin^2\left(t\left(\frac{N+1}{2}\right)\right)}{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}$$

* Montrons que pour $\alpha \in]0,\pi[$ et $t \in D_\alpha := [-\pi,-\alpha] \cup [\alpha,\pi]$, $(K_N)_{N\geq 0}$ converge uniformément vers 0 sur D_α.

Soit $N \in \mathbb{N}$ et $t \in D_\alpha$ on a $0 \leq K_N(t) = \frac{1}{N+1} \frac{\sin^2\left(t\left(\frac{N+1}{2}\right)\right)}{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} \leq \frac{1}{N+1} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$

* Montrons que $\forall N \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_N(t)\,dt = 1$. $\quad C_0(K_N(t)) = \|K_N\|_1$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ilt}\,dt = \begin{cases} \left[\frac{e^{ilt}}{il}\right] = 0 \text{ si } l \neq 0 \\ 2\pi \text{ si } l = 0 \end{cases}$$

On a $$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_N(t)\,dt = \frac{1}{2\pi(N+1)}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=0}^{N} D_k(t)\,dt = \frac{1}{2\pi(N+1)}\sum_{k=0}^{N}\sum_{l=-k}^{k}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ilt}\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi(N+1)}\sum_{k=0}^{N} 2\pi = \frac{N+1}{N+1} = 1.$$

Thm : La suite de fonctions $(\sigma_N(f))_{N\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f.

démo : On a

$$S_N(t) = \sum_{k=-N}^{N}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)e^{-iks}\,ds\, e^{ikt} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=-N}^{N} f(s)e^{ik(t-s)}\,ds$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s) D_N(t-s)\,ds$$

$x = t-s$, $dx = -ds$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_{t+\pi}^{t-\pi} f(t-x) D_N(x)\,dx$$

f est 2π-périodique

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-x) D_N(x)\,dx$$

dans 246 c'est déjà dans le plan donc ne pas faire

Donc $$\sigma_N(f)(t) = \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} S_k(t) = \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-x) D_k(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-x) K_N(x)\,dx$$

D'où $$|\sigma_N(f)(t) - f(t)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-x)K_N(x)\,dx - f(t)\right|$$

$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_N(x)\,dx = 1.$

$$= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f(t-x) - f(t)) K_N(x)\,dx\right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t-x) - f(t)| K_N(x)\,dx$$

Soit $\varepsilon > 0$

Comme f est continue et périodique, elle est uniformément continue donc

$\exists \alpha > 0$, $|x| < \alpha \Rightarrow |f(t-x) - f(t)| \leq \varepsilon$. Quitte à réduire α, on peut supposer $\alpha < \pi$.

On a alors

$$|\sigma_N(f)(t) - f(t)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{D_\alpha} |f(t-x) - f(t)| K_N(x)\,dx + \frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha} |f(t-x) - f(t)| K_N(x)\,dx$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} 2\|f\|_\infty \int_{D_\alpha} K_N(x)\,dx + \frac{1}{2\pi}\varepsilon\int_{-\pi}^{\pi} K_N(x)\,dx \xrightarrow[N\to\infty]{} 0 \text{ par le lemme.}$$

Questions : Théorème de Fejér.

- $D_N(t) = \dfrac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$?

$$D_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} e^{ikt} = \frac{e^{-iNt} - e^{i(N+1)t}}{1-e^{it}} = \frac{e^{\frac{it}{2}}}{e^{\frac{it}{2}}} \; \frac{e^{-i\left(N+\frac{1}{2}\right)t} - e^{i\left(N+\frac{1}{2}\right)t}}{e^{-\frac{it}{2}} - e^{\frac{it}{2}}}$$

$$= \frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

- $\dfrac{e^{-it\left(\frac{N+1}{2}\right)} - e^{it\left(\frac{N+1}{2}\right)}}{e^{-\frac{it}{2}} - e^{\frac{it}{2}}} = \dfrac{\sin\left(t \cdot \frac{N+1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$?

On a $e^{-it\left(\frac{N+1}{2}\right)} - e^{it\left(\frac{N+1}{2}\right)} = 2i \sin\left(-t\left(\frac{N+1}{2}\right)\right) \overset{\sin(-t) = -\sin(t)}{=} -2i\sin\left(t\left(\frac{N+1}{2}\right)\right)$

et de même $e^{-\frac{it}{2}} - e^{\frac{it}{2}} = 2i\sin\left(-\frac{t}{2}\right) = -2i\sin\left(\frac{t}{2}\right)$

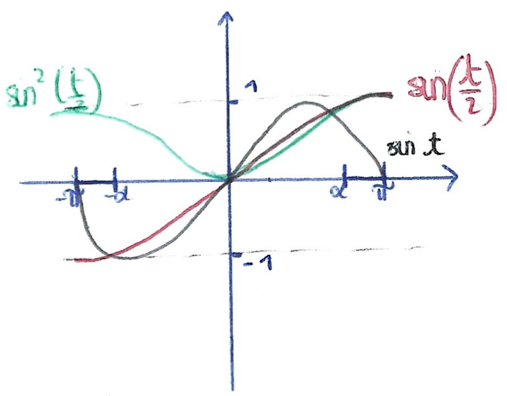
D'où $\dfrac{e^{-it\left(\frac{N+1}{2}\right)} - e^{it\left(\frac{N+1}{2}\right)}}{e^{-\frac{it}{2}} - e^{\frac{it}{2}}} = \dfrac{-2i\sin\left(t\left(\frac{N+1}{2}\right)\right)}{-2i\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = \dfrac{\sin\left(t\left(\frac{N+1}{2}\right)\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$

- $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{ilt}\,dt = \begin{cases} 0 \text{ si } l \neq 0 \\ 2\pi \text{ sinon} \end{cases}$?

Si $l = 0$ alors $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{0}\,dt = 2\pi$

Si $l \neq 0$ alors $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{ilt}\,dt = \left[\frac{e^{ilt}}{il}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{e^{il\pi} - e^{-il\pi}}{il} = \frac{2}{l}\sin(l\pi) = 0$ car $\sin(\pi\mathbb{Z}) = 0$.

- $\sin^2\left(\frac{t}{2}\right) \geqslant \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$?



On a sur D_α, $\underset{[-\pi,-\alpha]}{\text{décroît}}$ puis $\underset{[\alpha,\pi]}{\text{croît}}$

comme $\sin(-t) = -\sin(t)$

On a alors que $\sin^2(-t) = \sin^2(t)$

Donc si $t \in [-\pi, -\alpha]$ alors $\sin^2\left(\frac{t}{2}\right) \geqslant \sin^2\left(-\frac{\alpha}{2}\right) = \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

- f continue et périodique alors f est uniformément continue ?

Soit $\varepsilon > 0$, f est continue sur $[-\pi, \pi+1]$, donc par le thm de Heine,

$\exists \alpha > 0$ tq $\forall x, y \in [-\pi, \pi+1]$, $|x-y| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$

Soit $\alpha' = \min(\alpha, 1)$.

Soit $t, s \in \mathbb{R}$ tel que $|t-s| \leq \alpha'$

Puisque $|t-s| \leq 1$, il existe x et $y \in [-\pi, \pi+1]$ et $k \in \mathbb{Z}$ tels que $x = t - 2k\pi$ et $y = s - 2k\pi$

On a alors $|x-y| = |t-s| \leq \alpha$ donc

car f 2π-périodique

$$|f(t) - f(s)| = |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Ainsi $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \alpha' > 0$, $\forall (t,s) \in \mathbb{R}^2$ $|t-s| \leq \alpha' \Rightarrow |f(t) - f(s)| \leq \varepsilon$.